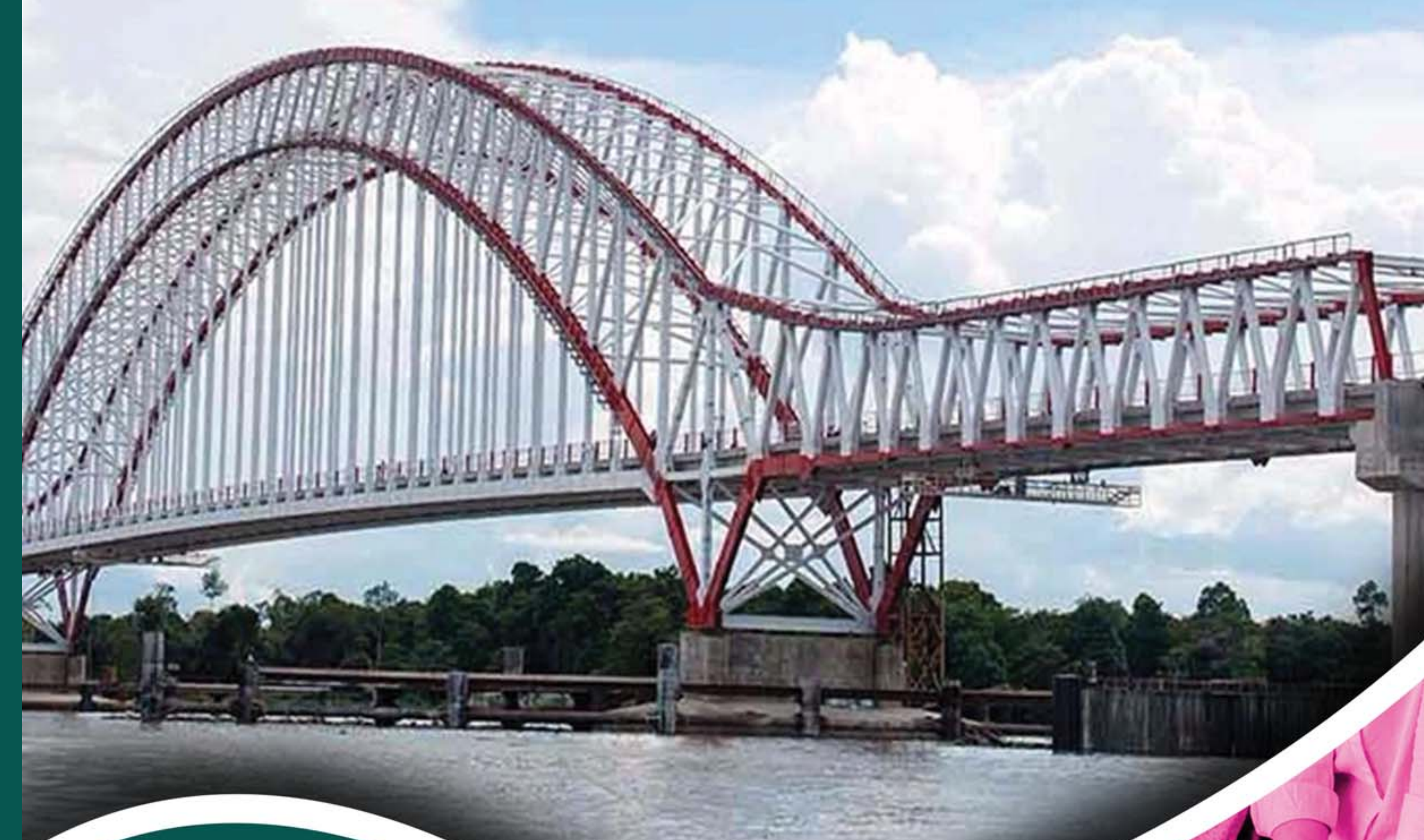


MODUL
TEMA 12

Indah dan Kokoh Negeriku

MATEMATIKA PEMINATAN PAKET C SETARA SMA/MA KELAS XII

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal PAUD, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah
Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus
Tahun 2020

MODUL
TEMA 12

Indah dan Kokoh Negeriku

MATEMATIKA PEMINATAN PAKET C SETARA SMA/MA KELAS XII

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal PAUD, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah
Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus
Tahun 2020

Matematika Peminatan Paket C Setara SMA/MA Kelas XII
Modul Tema 12 : Indah dan Kokohnya Negeriku

- **Penulis:** Ockta Hidayati, S.Pd.; Harun Al Rasyid, S.T.; Drs. G. Kundaru
- **Editor:** Dr. Samto; Dr. Subi Sudarto
  Dra. Maria Listiyanti; Dra. Suci Paresti, M.Pd.; Apriyanti Wulandari, M.Pd.

- **Diterbitkan oleh**: Direktorat Pendidikan Masyarakat dan Pendidikan Khusus–Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah–Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

x+ 45 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, 1 Juli 2020
Plt. Direktur Jenderal

Hamid Muhammad

Daftar Isi

Daftar Simbol

+ : Jumlah, tambah, menambah, positif
– : Kurang, negatif, mengurang
x : kali, mengali, penyilangan
. : kali
: : bagi, membagi, rasio
( ): kurung kurawal
[ ]: kurung siku
{ }: kurung kurawal, menyatakan himpunan
< : Kurang dari
> : lebih dari
≤ : kurang dari atau sama dengan
≥ : lebih dari atau sama dengan
= : sama dengan
√ : akar dari, elemen dari
° : derajat
± : positif dan negatif

INDAH DAN KOKOHNYA NEGERIKU

Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk dapat memahami isi modul ini secara maksimal, Anda harus mengikuti petunjuk penggunaan modul, yaitu:

1. Perhatikan istilah-istilah yang digunakan dalam modul seperti:

   Petunjuk Penggunaan Modul
   Bagian ini berisi langkah-langkah yang harus dilakukan untuk memahami modul.

   Tujuan Pembelajaran
   Bagian ini berisi kemampuan-kemampuan yang dikuasai setelah mempelajari modul.

   Pengantar
   Bagian ini berisi gambaran uraian materi yang dibahas di dalam modul.

   Penugasan
   Bagian ini berisi kegiatan yang dilakukan oleh peserta didik dalam memahami konsep materi di dalam modul.

   Latihan Unit
   Bagian ini berisi soal-soal yang dikerjakan oleh peserta didik sebagai penguatan dalam meningkatkan kemampuan peserta didik.

   Rangkuman
   Bagian ini berisi ringkasan materi modul secara keseluruhan. Beberapa rumus, persamaan, dan konsep-konsep yang penting disajikan dalam rangkuman sebagai penguatan bagi peserta didik.

   Latihan Akhir
   Bagian ini berbeda dengan latihan pada unit-unit. Bagian ini adalah latihan secara menyeluruh yang terdiri dari seluruh unit dalam modul ini.

   Kunci Jawaban
   Bagian ini berisi deskripsi jawaban latihan dan atau kriteria dari suatu penugasan. Bagian ini dibuka setelah peserta didik menyelesaikan latihan dan atau penugasan yang dikerjakan setelah mempelajari modul ini.

   Glosarium
   Berisi istilah-istilah yang menjelaskan konsep yang relevan dengan materi.

   Saran Referensi
   Bagian ini berisi sumber-sumber lain yang dapat digunakan sebagai tambahan bahan pembelajaran yang direkomendasikan untuk dicari. Bagian ini lebih menekankan tambahan pengetahuan bagi peserta didik.

   Daftar Pustaka
   Bagian ini berisi sumber-sumber bahan bacaan penyusun modul.

2. Modul ini disusun sedemikian rupa dengan tujuan Anda dapat secara mandiri mempelajari materi modul ini. Namun, apabila masih terdapat kendala dapat dikonsultasikan kepada tutor. Selain itu, Anda juga diberikan penugasan-penugasan yang dikerjakan dalam kelompok-kelompok.
3. Anda juga dapat mencari sumber bacaan lain yang relevan dengan materi pada modul sebagai sumber belajar tambahan.

Catatan:

1. Jangan tergoda untuk melihat kunci jawaban sebelum menyelesaikan soal latihan, baik di tiap unit maupun di akhir modul.
2. Jangan tergoda untuk melihat bagian rangkuman tanpa mempelajari uraian materi.

Tujuan yang diharapkan setelah mempelajari modul

Kompetensi matematika yang perlu dicapai peserta didik setelah mempelajari modul ini adalah mampu menjelaskan penggunaan prinsip turunan pada fungsi trigonometri sederhana dengan menggunakan sifat-sifat dan langkah-langkah penyelesaiannya serta menerapkannya untuk menyelesaikan masalah kontekstual dengan menggunakan prosedur dan strategi penyelesaian masalah sesuai dengan karakteristik masalahnya. Secara rinci, setelah mempelajari modul 12 ini, diharapkan peserta didik mampu:

1. Mendiskrifsikan turunan pada fungsi f(x) = sin x
2. Mendiskrifsikan turunan pada fungsi f(x) = cos x
3. Mendiskrifsikan turunan pada fungsi f(x) = tan x
4. Mendiskrifsikan turunan pada fungsi f(x) = sec x
5. Mendiskrifsikan turunan pada fungsi f(x) = cosec x
6. Mendiskrifsikan turunan pada fungsi f(x) = cotan x
7. Menggunakan kosep turunan fungsi trigonometri dalam memecahkan masalah matematika.
8. Menganalisis turunan dari fungsi implisit.
9. Mendeskripsikan turunan pada persamaan parameter.
10. Mengaplikasikan konsep turunan fungsi trigonometri dalam memecahkan masalah kehidupan nyata.

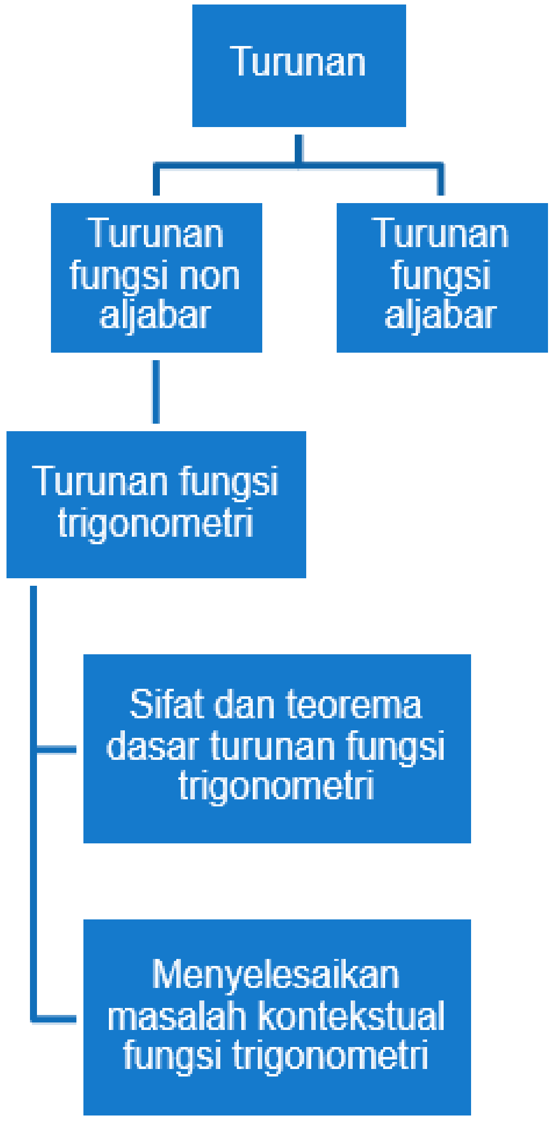
Pengantar Modul

Turunan fungsi (diferensial) adalah fungsi lain dari suatu fungsi sebelumnya, misalnya fungsi f menjadi f' yang mempunyai nilai tidak beraturan. Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Sir Isaac Newton (1642-1727), ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ahli matematika bangsa Jerman. Turunan (diferensial) digunakan sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanika.

Konsep turunan fungsi secara universal banyak sekali digunakan dalam bidang ekonomi untuk menghitung biaya marjinal, biaya total atau total penerimaan, dalam bidang biologi untuk menghitung laju pertumbuhan organisme, dalam bidang fisika untuk menghitung kepadatan kawat, dalam bidang kimia untuk menghitung laju pemisahan, dalam bidang geografi dan sosiologi untuk menghitung laju pertumbuhan penduduk dan masih banyak lagi.

Matematika dan arsitektur saling terkait seperti halnya seni lainnya, arsitek menggunakan matematika untuk beberapa alasan. Selain matematika yang dibutuhkan dalam teknik bangunan, para arsitek menggunakan geometri untuk menentukan bentuk ruang bangunan. Dari Pythagoras di abad ke-6 SM, hingga seterusnya; menciptakan bentuk-bentuk yang dianggap harmonis, dalam menyusun bangunan dan lingkungannya yang sesuai dengan prinsip matematika, estetika dan kadang-kadang juga aspek-aspek religius. Menghiasi bangunan dengan benda-benda matematis seperti tesselasi; dan memenuhi fungsi lingkungan, seperti meminimalkan kecepatan angin di sekitar basis bangunan tinggi.

Di Mesir Kuno, Yunani Kuno, India dan dunia Islam; bangunan termasuk piramida, kuil, masjid, istana dan monumen makam ditata dengan proporsi yang spesifik karena alasan agama. Dalam arsitektur Islam, bentuk geometris dan pola ubin geometris digunakan untuk menghias bangunan, baik di dalam maupun di luar bangunan. Beberapa candi Hindu memiliki struktur fraktal, di mana komponen-komponennya menyerupai bentuk keseluruhannya serta menyampaikan pesan tentang kosmologi Hindu yang tak terbatas. Dalam arsitektur Tiongkok, tulou yang berada di provinsi Fujian berbentuk melingkar dengan struktur pertahanan komunal. Pada abad ke-21, ornamen matematis juga digunakan untuk menutupi bangunan masyarakat umum.



UNIT 1. ATAP RUMAHKU

Sumber: http://archidkot.blogspot.com/2016/05/arsitektur-modern.html

Gambar 1 Farnsworth House

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki ataupun gedung bertingkat yang sedang dibangun. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri.

Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini. Teknologi pencitraan dari komputer dapat digunakan dalam dunia kedokteran secara luar biasa untuk menemukan sumber beberapa penyakit ganas. Itu baru sebagian kecil dari manfaat trigonometri, perlu alasan lain untuk menemukan rumus-rumus trigonometri membantu hidup kita.

Berikut beberapa contoh penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari misalnya dalam navigasi untuk menemukan jarak dari pantai ke suatu titik di laut. Trigonometri umumnya juga digunakan dalam mencari ketinggian menara dan pegunungan. Trigonometri juga digunakan dalam oseanografi dalam menghitung ketinggian gelombang air laut. Digunakan untuk mengukur ketinggian suatu pohon. Trigonometri digunakan dalam menemukan jarak antara benda-benda angkasa. Fungsi sinus dan cosinus merupakan dasar bagi teori fungsi periodik seperti pada gelombang suara dan cahaya.

Arsitek menggunakan trigonometri untuk menghitung beban struktural, kemiringan atap, permukaan tanah dan banyak aspek lain, termasuk bayangan matahari dan sudut cahaya. Perhatikan kumpulan gambar-gambar arsitek modern atap dari baja berikut!

Sumber: http://bengkelahmad-interior.blogspot.com/2016/10/baja-ringan-baja-berkualitas-tinggi.html

Gambar 2 Macam-Macam Bentuk Atap Rumah

Penugasan 1

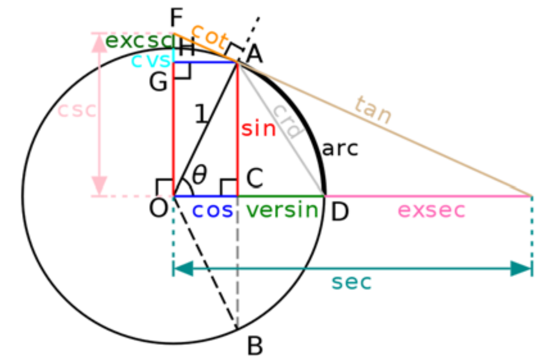
Memahami tentang fungsi turunan Trigonometri:

1. **Tugas:**
   Peserta didik ditugaskan untuk mencari mana yang merupakan fungsi trigonometri dan yang bukan fungsi trigonometri.

Fungsi	Fungsi Trigonometri	
	Ya	Tidak
$\tan x - \sin x$		
$x \sin x + 2$		
$\frac{1}{\sin x} + \cos^3 x$		
$x^2 + \sqrt{\sin x}$		
$(\sin x)^{\cos x} + \tan x$		

2. **Tujuan:**
   Peserta didik diharapkan mampu:
   a. Menjelaskan fungsi trigonometri,
   b. Mengetahui nama yang merupakan fungsi pada tabel yang telah disajikan,
   c. Memberikan tanda (√) pada kolom yang sesuai,
   d. Diskusikan dengan teman Anda, apa saja ciri-ciri dari fungsi Trigonometri

A. Turunan Fungsi Trigonometri Dasar



Sumber: *https://id.wikipedia.org/wiki/Trigonometri*

Gambar 3 Fungsi Trigonometri

Diawal materi kita telah mempelajari tentang turunan trrigonometri dasar. Namun, perlu Anda ketahui bahwa turunan fungsi trigonometri bukan hanya menurunkan fungsi f(x) = sin x, f(x) = cos x, atau f(x) = tan x. Masih ada bentuk-bentuk turunan fungsi trigonometri lain yang banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari.

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki ataupun gedung bertingkat yang sedang dibangun. Para arsitek tersebut bekerja dengan menggunakan perbandingan trigonometri. Trigonometri menemukan penggunaannya yang sempurna pada arsitektur modern. Kurva-kurva nan indah pada permukaan baja, bebatuan, kayu, dan lain-lain dapat diwujudkan karena potensi yang besar dari ilmu ini.

Sebelumnya juga telah kita bahas materi *"deferensial turunan secara umum"* dan *"turunan fungsi aljabar"*. Untuk turunan fungsi trigonometri ini, kita akan langsung menggunakan rumus dasar turunan fungsi trigonometri. Sementara untuk pembuktiannya, tetap menggunakan definisi turunan secara umum. Dan juga kita harus mengingat kembali rumus trigonometri pada materi sebelumnya.

Turunan fungsi trigonometri merupakan turunan fungsi yang melibatkan bentuk atau ekspresi trigonometri seperti sinus, cosinus, tangen, cotangen, secan dan cosecan. Seperti diketahui, turunan dari fungsi f(x) atau f'(x) merupakan nilai limit yang didefinisikan sebagai

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$ dengan syarat limitnya ada.

Kita akan menggunakan sifat limit, sifat turunan dan operasi matematika untuk menentukan turunan dari fungsi trigonometri. Misalkan y = f(x) = sin x, maka:

➢ Turunan dari fungsi trigonometri y = sin x atau f(x) = sin x

f(x) = sin x

f(x + h) = sin (x + h)

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\frac{1}{2}(2x+h)\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2\cos\frac{1}{2}(2x+h)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h} = \lim_{h\to 0} 2\cos\frac{1}{2}(2x+h).(1/2)\lim_{(1/2)h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{(1/2)h}$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}(2x).\frac{1}{2}.1$$

$$= \cos x$$

Jadi, dapat disimpulkan **Jika y = sin x maka y' = cos x**

- Turunan dari fungsi trigonometri y = cos x atau f(x) = cos x

f(x) = cos x

f(x + h) = cos (x + h)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{1}{2}(2x+h)\sin\frac{1}{2}h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-2\sin\frac{1}{2}(2x+h)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}\right)$$

$$= -2\sin\frac{1}{2}(2x).\ \frac{1}{2}$$

$$= -\sin x$$

Jadi, dapat disimpulkan **Jika y = cos x maka y' = –sinx**

- Turunan dari fungsi trigonometri y = tan x atau f(x) = tan x

Cara 1: menggunakan definisi turunan

f(x) = tan x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)\tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\tan x+\tan(h)}{1-\tan x\tan(h)}\right)\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\tan x+\tan(h) -(\tan x)(1-\tan x\tan(h)}{1-\tan x\tan(h)}\right)\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\tan x+\tan(h) -(\tan x-\tan^2 x\ \tan(h))}{1-\tan x\tan(h)}\right)\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\tan(h) -\tan^2 x\tan(h))}{1-\tan x\tan(h)}\right)\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(1+\tan^2 x)\tan(h)}{1-\tan x\tan(h)}\right)\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(\sec^2 x)}{1-\tan x\tan(h)}\right)\frac{\tan(h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(\sec^2 x)}{1-\tan x\tan(h)}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\tan(h)}{h}$$

$$= \left(\frac{(\sec^2 x)}{1-\tan x\tan(0)}\right)(1)$$

$$= \left(\frac{(\sec^2 x)}{1-\tan x(0)}\right)$$

$$= \sec^2 x$$

Cara 2: menggunakan sifat turunan dari perkalian dan pembagian dua fungsi

Diketahui: f(x) = tan x maka $f(x) = \frac{\sin x}{\cos X}$

Misalkan: u = sin x maka u' = cos x

v = cos x maka v' = –sin x

Sehingga: $f'(x) = \frac{u.v' - u'.v}{V^2}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

Jadi, dapat disimpulkan **Jika y = tan x maka y' = sec^{2}x**

- Turunan dari fungsi trigonometri f(x) = cot x maka $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

Misalkan: u = cos x maka u' = –sin x

v = sin x maka v' = cos x

Sehingga: $f'(x) = \frac{u.v' - u'.v}{V^2}$

$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = -\csc^2 x$$

Jadi, dapat disimpulkan **jika y = cot x maka y' = -csc²x**

- Turunan dari fungsi trigonometri f(x) = sec x maka $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

Misalkan: u = 1 maka u' = 0

v = cos x maka v' = -sin x

Sehingga:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(0)(\cos x) - (1)(-\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$f'(x) = -\sec x \tan x$$

Jadi, dapat disimpulkan **jika y = sec x maka $y' = \frac{1}{\cos x}$**

- Turunan fungsi trigonometri dari f(x) = csc x maka $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

Misalkan: u = 1 maka u' = 0

v = sin x maka v' = cos x

Sehingga:

$$f'(x) = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(0)(\sin x) - (1)(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

Jadi, dapat disimpulkan **Jika y = cosec x maka y' = -cosec x cot x**

Dari hasil pembuktian rumus turunan trigonometri di atas dapat disimpulkan sebagai berikut:

RUMUS TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI					
Rumus dasar		Rumus substitusi $u(x)$		Contoh	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u' \cos u$	$\sin 2x$	$2 \cos 2x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u' \sin u$	$\cos x^3$	$-3x^2 \sin x^3$
$\tan x$	$sec^2 x$	$\tan u$	$u' sec^2 u$	$\tan 5x$	$5 \sec^2 5x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\csc u$	$-u' \csc u \cot u$	$\csc 4x$	$-4 \csc 4x \cot 4x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\sec u$	$u' \sec u \tan u$	$\sec x^2$	$2x \sec x^2 \tan x^2$
$\cot x$	$-csc^2 x$	$\cot u$	$-u' csc^2 u$	$\cot 3x$	$-3 \csc^2 3x$

Tabel 1 Rumus Turunan Trigonometri

Contoh Soal 1.1

Tentukan turunan dari:

a. f(x) = 2 cos x + 4 sin x

b. $f(x) = \cos^3 x$

c. $f(x) = \frac{1}{4} \sin 4x$

d. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

e. $f(x) = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

Penyelesaian:

a. f(x) = 2 cos x + 4 sin x

Maka f'(x) = -2 sin x + 4 cos x

b. $f(x) = \cos^3 x$

Maka $f'(x) = 3\cos^2 x.(-\sin x).1$

$$f'(x) = -3\cos^2 x \sin x$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2} \cos x (2 \sin x \cos x)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2} \cos x \sin 2x$$

c. $f(x) = \frac{1}{4} \sin 4x$

Maka $f'(x) = (\frac{1}{4} \cos 4x)\ 4$

$$f'(x) = \cos 4x$$

d. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

misal: $u = \sin x$ $\quad\quad\quad$ $v = \cos x - \sin x$

$$f'(x)=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x\,(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x\sin x+\cos^2 x-\sin x\cos x+\sin^2 x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\sin 2x}$$

e. $y=\dfrac{\cot x}{1+\cot x}$

Misal $u = \cot x$ $\quad\quad\quad$ $v = 1 + \cot x$

$$y'=\frac{u}{v}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}=\frac{(1+\cot x)(-\csc^2 x)-(-\csc^2)}{(1+\cot x)^2}$$

$$=\frac{-\csc^2 x-\csc^2 x\cot x+\csc^2 x\cot x}{(1+\cot x)^2}=\frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$$

Latihan Soal 1.1

Carilah turunan f'(x) dari fungsi-fungsi trigonometri dibawah ini:

a. $f(x) = \sin^2 x - \sin x^2$

b. $f(x) = (3x+4)^2 \sin 2x$

c. $f(x) = \text{cotan } 2x$

d. $f(x) = (1-x^2)\cos(1-x^2)$

e. $f(x) = \sin^3(3-2x)$

B. Turunan Fungsi Trigonometri Untuk Sudut ax + b

Anda tentu telah mempelajari aturan rantai yang digunakan untuk menurunkan suatu fungsi dari fungsi (disebut juga fungsi komposisi). Masih ingatkah Anda tentang aturan rantai tersebut?

Aturan Rantai

Jika y bisa dinyatakan dalam u dan u bisa dinyatakan dalam x, maka turunan y terhadap x, bisa dinyatakan dengan aturan rantai:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Kita akan menggunakan aturan rantai di atas untuk menentukan y = sin (ax + b) dengan a dan b adalah konstanta. Misalkan u = ax + b, kita bisa menuliskan sebagai berikut:

$y = \sin u$ dan $u = ax+b$

$\dfrac{dy}{dx}=\cos u$ $\quad\quad\quad$ $\dfrac{du}{dx}=a$

Dengan demikian, manurut aturan rantai

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\cos u).(a) = a\cos u$$

Subtitusikan kembali u = ax + b sehingga diperoleh $\frac{dy}{dx}= a\cos(ax+b)$

Berikut ini adalah turunan dari fungsi-fungsi rumus sin cos tan trigonometri dalam variabel sudut ax + b, dimana a dan b adalah bilangan real dengan a ≠ 0:

f(x) = sin (ax + b) → f '(x) = a cos (ax + b)

f(x) = cos (ax + b) → f '(x) = -a sin (ax + b)

f(x) = tan (ax + b) → f '(x) = a sec2 (ax +b)

f(x) = cot (ax + b) → f '(x) = -a csc2 (ax+b)

f(x) = sec (ax + b) → f '(x) = a tan (ax + b). sec (ax + b)

f(x) = csc (ax + b) → f '(x) = -a cot (ax + b). csc (ax + b)

Contoh Soal 1.2

Tentukan turunan fungsi trigonometri berikut ini:

a. $y = \sin 2x$

b. $y = \sin^2 x$

c. $y = \cos^3(3x^2-x+7)$

d. $y = \tan^5(2x-x^3)$

Penyelesaian:

a. $\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$

b. $\frac{dy}{dx} = 2\sin x.\mathrm{co}x = \sin 2x$

c. $\frac{dy}{dx} = 3\cos^2(3x^2-x+7)(-\sin(3x^2-x+7))(6x-1)$

$= -3(6x-1).\cos^2(3x^2-x+7).\sin(3x^2-x+7)$

d. $\frac{dy}{dx} = 5\tan^4(2x-x^3).\sec^2(2x-x^3).(2-3x^2)$

$= 5(2-x^2)\tan^4(2x-x^3).\sec(2x-x^3)$

Latihan Soal 1.2

Tentukan turunan tiap fungsi trigonometri berikut terhadap x:

a. $f(x) = \cos^2(2x-\pi)$
b. $f(x) = \sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$
c. $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$
d. $f(x) = \sqrt{x}\sin x$
e. $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$

C. Turunan Fungsi Implisit

Fungsi yang telah kita turunkan sebelumya, variabel terikat y bisa nyatakan dalam variabel bebas x sebagai fungsi $y = f(x)$, misalnya $y = 3.\sin 2x$ (bentuk eksplisit). Sedangkan fungsi seperti $x^2 + y^2 = 4$ adalah bentuk implisif, fungsi tersebut bisa diubah menjadi bentuk eksplisit menjadi: $y^2 = 4 - x^2$

Bagaimana jika bentuk $2x^2 + yx^2 + 1 = 0$ apakah bisa diubah menjadi bentuk eksplisit y = f(x).

Untuk mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari bentuk implisit kita menggunakan aturan rantai. Teknik untuk mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari bentuk implisit ini disebut sebagai turunan fungsi implisit.

Sampai saat ini, kita telah bekerja untuk fungsi satu variabel. Bagaimana dengan turunan fungsi multi variabel yang melibatkan dua variabel atau lebih? Misalkan z = f(x,y), maka fungsi z dapat diturunkan terhadap variabel x dan y, yang kita sebut dengan turunan parsial fungsi z terhadap x $(\frac{\partial F}{\partial x})$ dan turunan parsial fungsi z terhadap y $(\frac{\partial F}{\partial y})$. Akibatnya persamaan berbentuk f(x, y) = 0 menyatakan y sebagai fungsi dari x, yang mana dalam hal ini y disebut fungsi implisit dari x.

Fungsi implisit adalah fungsi yang terdiri dari dua atau lebih variabel yakni variabel bebas dan variabel tak bebas, yang berada dalam satu ruas dan tidak bisa dipisahkan pada ruas yang berbeda. Menurunkan fungsi implisit, tak jauh beda dengan menurunkan fungsi variabel tunggal, yakni dengan menggunakan notasi Leibniz (dy/dx). Dengan menggunakan aturan rantai dan operasi matematika tertentu, kita dapat menurunkan fungsi implisit y secara terhadap x.

Contoh Soal 1.3

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dalam x dan y untuk tiap fungsi implisit berikut.

a. $(x+2y)^8$
b. $y^2 - 2x^2y + 4x^3 + 20x^2 = 0$
c. $y\cos x = \sin(x-y)$
d. $xy + \sin y = 1$
e. $y + \sin(xy^2) = 3$

Penyelesaian:

a. Kita gunakan aturan rantai

Misalkan z = x + 2y, maka $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{d}{dz}f.\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}z^8.\frac{d}{dx}(x+2y)$

Sehingga

$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 8z^7.(1 + 2\frac{d}{dx}y)$

$= 8(x+2y)^7.\left(1+2\frac{dy}{dx}\right)$

b. $f(x,y) = y^2 - 2x^2y + 4x^3 + 20x^2 = 0$

Turunkan terhadap x pada tiap ruas , yaitu $\frac{d}{dx}(y^2 - 2x^2y + 4x^3 + 20x^2) = \frac{d}{dx}(0)$

$\rightarrow y^2\frac{d}{dx}.\frac{dy}{dx} - \left(2x^2y\frac{d}{dx} + 2x^2y\frac{d}{dy}.\frac{dy}{dx}\right) + 4x^2\frac{d}{dx} + 20x^2\frac{d}{dx} = 0$

$\rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - \left(4xy + 2x^2\frac{dy}{dx}\right) + 12x^2 + 40x = 0$

$\rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 2x^2\frac{dy}{dx} - 4xy + 12x^2 + 40x = 0$

$\rightarrow (2y - 2x^2)\frac{dy}{dx} - 4xy + 12x^2 + 40x = 0$

c. $f(x,y) = y\cos x - \sin(x-y) = 0$

$\frac{df}{dx} = -y\sin x - \cos(x-y)$

$\frac{df}{dy} = \cos x + \cos(x-y)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} = -y\sin x - \cos(x-y)}{\frac{df}{dy} = \cos x + \cos(x-y)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin x + \cos(x-y)}{\cos x + \cos(x-y)}$$

d. $xy + \sin y = 1$

$$\rightarrow \left(\frac{dx}{dx}.y + x.\frac{dy}{dx}\right) + \cos y\frac{dy}{dx} = 0$$

Aturan perkalian

$$\rightarrow y + x\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx}(x + \cos y) = -y$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + \cos y}$$

e. $y + \sin(xy^2) = 3$

$$\rightarrow y' + \cos(xy^2).\ [y2 + 2xy.Y'] = 0$$

$$\rightarrow y' + y^2.\cos xy^2 + 2y'.xy\cos xy^2 = 0$$

$$\rightarrow y' = (-y^2.\cos xy^2)(1 + 2xy\cos xy^2)$$

Latihan Soal 1.3

Hitunglah $\frac{dy}{dx}$ dalam x dan y untuk tiap- tiap fungsi berikut:

a. $x^2y^2 + 4xy = 12y$
b. $\sin(x - y) = \cos y$
c. $\cos y = x + \sin x$

D. Turunan Fungsi Parameter

Di kelas XI Anda telah mempelajari bahwa persamaan parabola $y^2 = 4px$ bisa dipenuhi oleh persamaan $x = pt^2$ dan $y = 2pt$, dengan t sebagai parameternya. Oleh karena itu, persamaan $x = pt^2$ dan $y = 2pt$ disebut persamaan parameter dari $y^2 = 4px$.

Jika kita diberi dua persamaan parameter $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dan diminta menentukan $\frac{dy}{dx}$, maka lebih mudah bagi kita untuk menyelesaikannya dengan menggunakan aturan rantai, yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}}$$

Contoh Soal 1.4

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ yang dinyatakan dalam t untuk fungsi-fungsi yang dinyatakan oleh persamaan parameter berikut:

a. $x = 2\sin t$; $y = 3\cot t$
b. $x = 1+2\cos t$, $y = 6+\sin t$
c. $x = 4\sqrt{t}$, $y = 3t^2 - 5$
d. $x = 1+2\sin t$, $y = 4+\cos t$

Penyelesaian:

a. Kita gunakan aturan rantai, dy/dx = dy/dt. dt/dx = $\frac{dy/dt}{dx/dt}$

$y' = (-3\sin t)\ (2\cos t)$
$dy/dt = -3(1 + \cot^2 t)$
$dx/dt = 2\cos t$
$dy/dx = \frac{-3(1+\cot^2 t)}{2\cos t}$

b. $x = 1+2\cos t \rightarrow \frac{dx}{dt} = -2\sin t$

$y = 6+\sin t \rightarrow \frac{dy}{dt} = \cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos}{-2\sin t} = -\frac{1}{2}\tan t$$

c. $x = 4\sqrt{t} = 4.\ t^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 4.\ \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = 2t^{-\frac{1}{2}}$

$y = 3t^2 - 5 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 6t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t}{2t^{-\frac{1}{2}}} = 3t.t^{\frac{1}{2}} = 3t\sqrt{t}$$

d. $x = 1 + 2\sin t \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\cos t$

$y = 4 + \cos t \rightarrow \frac{dy}{dt} = -\sin t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

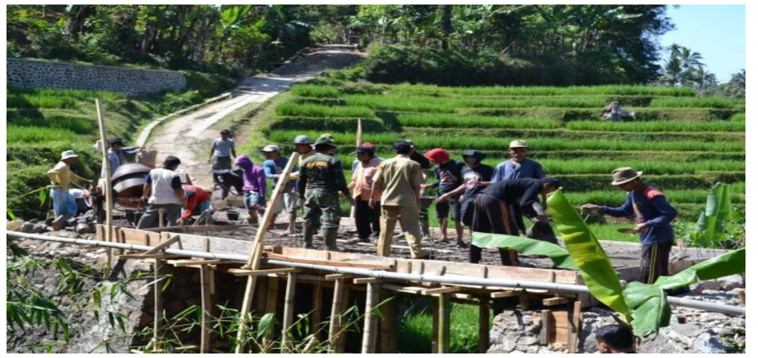
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin t}{2\cos t} = -\frac{1}{2}\tan t$$

Latihan Soal 1.4

Hitunglah $\frac{dy}{dx}$ yang dinyatakan dalam t untuk fungsi-fungsi yang dinyataan oleh persamaan parameter berikut:

a. $x = t + \sin t$, $y = 1 - \cos t$
b. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$
c. $x = 5\cos t$ dan $y = 4\sin t$

UNIT 2. JEMBATAN DI DESAKU



Sumber:*https://pnpmsumedang.wordpress.com/pembangunan-jembatan-desa-pamekaran*
Gambar 5 Jembatan Penghubung

Jembatan adalah sebuah struktur yang sengaja dibangun untuk menyeberangi jurang atau rintangan seperti sungai, lembah, rel kereta api maupun jalan raya. Jembatan dibangun agar para pejalan kaki, pengemudi kendaraan atau kereta api dapat melintasi halangan-halangan tersebut. Ketika seorang insiyur membuat perencanaan pembangunan suatu proyek, seperti pembangunan jalan raya, jembatan, gedung bertingkat, bendungan, dll. Seorang surveyor juga harus mempersiapkan untuk input data mengenai permukaan bumi dan tanah, setelah itu data diinput pada suatu sistem informasi yang diberikan naman GIS. Tidak jarang pengamatan untuk menghitung kemiringan jalan raya, rel kereta api, dan jembatan. Beberapa contoh macam-macam jembatan:

Sumber:*http://korem091-tniad.mil.id/kodim0906/masyarakat-desa-melintang-selalu-dukung-pembuatan-jembatan*
Gambar 6 Bangunan Jembatan

A. Laju Perubahan Fungsi Trigonometri

Sumber:*http://selingkarrumahmatematika.blogspot.com/2013/04/laju-perubahan.html*

Gambar 7 Laju Perubahan

Laju perubahan terjadi hampir di semua sains. Pada bidang geologi, seorang geologiwan tertarik untuk mengetahui laju pendinginan suatu batuan pelebur dengan cara konduksi panas ke dalam batuan sekelilingnya. Seorang insinyur ingin mengetahui laju air mengalir ke dalam atau ke luar penampung. Seorang pakar ilmu tata kota pasti tertarik dalam laju perubahan kepadatan penduduk kota seiring pertambahan jarak pusat kota.

Bahkan dalam ilmu psikologi, mereka yang berminat mempelajari teori akan belajar apa yang disebut kurva pembelajaran, yang menunjukkan grafik unjuk kerja P(t) dari seseorang yang mempelajari keterampilan sebagai fungsi waktu pelatihan t. Tentu saja, yang menjadi perhatian khusus adalah laju perbaikan unjuk kerja ketika waktu pelatihan telah berlalu, yaitu dP/dt.

Untuk dapat menjawab persoalan-persoalan yang berkaitan dengan laju perubahan di banyak bidang ilmu tersebut, kamu perlu mempelajari turunan seperti yang akan dibahas pada pokok bahasan berikut ini.

Setelah siswa mempelajari turunan, siswa diharapkan mampu:

1. Menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi.
2. Menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi dan memecahkan masalah.
3. Merancang model matematika yang berkaitan dengan ekstrim fungsi, menyelesaikan modelnya, dan menafsirkan hasil yang diperoleh.

Masalah pertama berkaitan dengan laju perubahan suatu fungsi terhadap variabel bebasnya, misalnya laju perubahan y = f(x) terhadap x.

Laju perubahan fungsi $y = f(x)$ terhadap x adalah $\frac{dy}{dx}$ yang dinyatakan dalam x.

Sebagai contoh, laju perubahan $y = x^2$ terhadap x adalah $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Contoh Soal 2.1

Pada nyata P_0 (dalam satuan vilt ampere) suatu rangkaian listrik yang daya aktifnya P (satuan watt) dan sudut impedansinya $\theta, diberikan\ oleh\ P_0 = P \sec\theta$

Jika P adalah konstan pada 20 W, tentukan laju perubahan P_0 jika θ berubah pada laju 0,050 rad/menit saat $\theta = 45°$

Penyelesaian:

Diketahui laju perubahan sudut θ terhadap waktu t adalah $\frac{d\theta}{dt}$ = 0,050 rad/menit pada $\theta =$ 45°. Ditanya laju perubahan daya nyata P_0 , yaitu $\frac{dp_0}{dt}$.

Perhatikan $P_0 = f(\theta)\ sedangan\ \theta = f(t)$ sehingga laju perubahan $\frac{dp_0}{dt}$ harus ditentukan dengan aturan rantai.

$$\frac{dp_0}{dt} = \frac{dp_0}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} \ldots (*)$$

Diketahui $P_0 = P\cos\theta$

$\rightarrow P_0 = 20\sec\theta$

Dengan demikian , $\frac{dp_0}{d\theta} = 20\sec\theta\tan\theta$

Subtitusikan ke $(*)$ diperoleh

$$\frac{dp_0}{dt} = (20\sec\theta\tan\theta).(0{,}050\ rad/menit)$$

$$= (20)(0{,}050)\sec\theta\tan\theta$$

$$\frac{dp_0}{dt} = \sec\theta\tan\theta = \sec 45°\tan 45°$$

$$\frac{dp_0}{dt} = \sqrt{2}\ W/menit$$

Jadi, laju perubahanP_0 adalah$\sqrt{2}\ W/menit$

Penugasan 2.1

Portopolio: Perkembangan konsep fungsi turunan trigonometri.

1. **Tugas:**
   Peserta didik ditugaskan untuk membuat rangkuman, artikel serta simpulan dari perkembangan konsep trigonometri dari masa ke masa.
2. **Tujuan:**
   - Peserta didik diharapkan mampu mengembangkan konsep turunan fungsi trigonometri dari masa ke masa.
   - Peserta didik diharapkan mampu membuat simpulan berupa artikel sejarah perkembangan turunan fungsi trigonometri.
3. **Media:**
   - Buku referensi
   - Perpustakaan
   - Internet

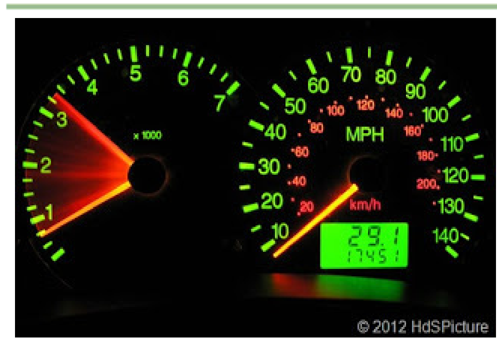
Langkah-langkah:

- Mengumpulkan bermacam buku referensi, perpustakaan, dan internet,
- Membuat rangkuman dari kegiatan-kegiatan yang telah peserta didik kerjakan dan selesaikan pada unit ini,
- Mencari artikel mengenai perkembangan konsep turunan fungsi trigonometri,
- Menyimpulkan dari artikel sejarah perkembangan konsep turunan fungsi trigonometri,
- Mengumpulkan hasil rangkuman, artikel serta simpulan kepada tutor.

Latihan Soal 2.1

Diketahui y = sin 3x + cos^2 x dan nilai x bertambah pada laju 0,2 rad/s.
Berapa laju perubahan y terhadap waktu saat x = $\frac{\pi}{6}$?

B. Kecepatan dan Percepatan Fungsi Trigonometri



Sumber:http://ramadhan-m.blogspot.com/2017/08/antara-kecepatan-dan-percepatan.html
Gambar 8 Kecepatan dan Percepatan

Masalah kedua adalah menentukan kecepatan dan percepatan gerak partikel jika fungsi perpindahannya, x = x(t) diberikan. Dalam pelajaran fisika telah Anda kenal bahwa jika fungsi perpindahan suatu partikel x = x(t) diberikan, maka kita bisa menentukan kecepatan v = v(t) dan percepatan a = a(t) dengan menggunakan turunan.

Percepatan dan perlajuan adalah dua hal yang serupa, yang membedakan hanya ketiadaan arah pada perlajuan. Percepatan rata-rata merupakan perbandingan antara perubahan kecepatan terhadap selang waktu tertentu.

Apakah perbedaan antara laju dan kecepatan? Dalam fisika, laju dan kecepatan adalah dua buah besaran fisika yang berbeda. Laju adalah jarak yang ditempuh benda tiap satuan waktu, sedangkan kecepatan adalah perpindahan benda tiap satuan waktu atau laju perubahan posisi benda ketika bergerak dalam arah tertentu. Laju merupakan besaran scalar, sedangkan kecepatan merupakan besaran vector.

Meskipun laju dan kecepatan merupakan besaran fisika yang berbeda, keduanya mempunyai dimensi dan satuan yang sama. Dimensi laju dan kecepatan adalah [L][T]-1, sedangkan satuan SI laju dan kecepatan adalah meter/sekon (m/s).

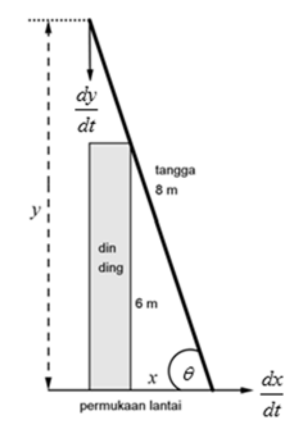
Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi perpindahan. Untuk perpidahan x = x(t), maka
Kecepatan : $v = \frac{dx}{dt}$
Percepatan adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan atau turunan kedua dari fungsi perpindahan.
Percepatan: $a = \frac{dv}{dt}\ atau\ \ a = \frac{d^2x}{dt^2}$

Contoh Soal 2.2

Sebuah tangga panjangnya 8 meter bersandar pada dinding tegak yang tingginya 6 meter dengan bagian atas tangga melewati dinding. Jika ujung bawahnya ditarik horizontal dengan kecepatan 2 meter/detik menjauhi dinding, tentukan kecepatan vertikal ujung atas tangga pada saat tangga membentuk sudut 60^0 dengan permukaan lantai.

Penyelesaian:

Perhatikan gambar di samping



Misalkan pada saat t, sudut antara tangga dengan permukaan lantai adalah ϴ, jarak ujung bawah tangga ke dinding adalah x meter, dan jarak ujung atas tangga ke permukaan lantai adalah y meter.
Oleh karena kecepatan vertikal ujung atas tangga ditanyakan, maka kita perlu menentukan dy/dt pada saat tangga membentuk sudut 60° dengan permukaan lantai dan dx/dt = 2 m/det.

Berdasarkan gambar di atas $\tan\theta = \frac{6}{x}\ atau\ x\tan\theta = 6$

Turunan Implisit terhadap t dari kedua ruas menghasilkan

$$x\ sec^2\ \theta\ \frac{d\theta}{dt} + \tan\theta\ \frac{dx}{dt} = \theta \ldots(*)$$

Untuk θ = 60° berlaku

(i) $x = \frac{6}{\tan 60°} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

(ii) $\frac{dx}{dt} = 2$ meter/detik

Jika hasil di atas disubtitusikan ke persaman (∗) maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$2\sqrt{3}(4)\frac{d\theta}{dt}\sqrt{3}(2) = 0$$

$$\rightarrow 8\sqrt{3}\frac{d\theta}{dt} = -2\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{4} \ldots (**)$$

Jika kita melihat gambar di atas lagi maka diperoleh

$$\sin\theta = \frac{y}{8} \; atau \; y = 8\sin\theta$$

Turunan implisit terhadap t dari kedua ruas menghasilkan

$$\frac{dy}{dt} = 8\cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = 8\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -1\, meter/detik$$

Dengan demikian, kecepatan vartikel ujung atas tangga adalah -1 meter/detik.

Contoh Soal 2.3

Perpindahan sebuah partikel yang sedang bergerak harmonik sederhana diberikan oleh x = 5 sin 2t, dengan x dalam sentimeter dan waktu t dalam sekon. Jika periode gerakan adalah T, percepatan partikel pada t = T/6 s adalah.....

Penyelesaian:

Diketahui: X = 5 sin 2t dan t = T/6

Pola persamaan simpangan gerak harmoni diatas adalah:

Y = A Sin ωt

ω = 2π/ T

Sehingga:

Y= X dan A = 5

ω = 2 ⇒ T = 2π/ω ⇒ T = 2π/2 ⇒ T = π

Maka, percepatan partikel pada saat t = T/6 adalah:

a = - A ω^2 sin ωt

a = - 5 x 2^2 x sin 2π/T. T/6

a = - 20 sin 2π/6

a = - 20 x sin 60°

a = - 20 x 1/2 √3

a = - 10√3 m/s²

Jadi percepatan partikelnya adalah 10√3 m/s².

Penugasan 2.2

Proyek: Mencari penerapan turunan fungsi trigonometri dalam kehidupan sehari-hari.

1. Tugas:

Mencari penerapan turunan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari.

Membuat suatu masalah dan penyelesaiannya secara runtut dengan menggunakan konsep-konsep turunan dalam menyelesaikan masalah tersebut.

2. Tujuan:

Dapat mengaplikasikan konsep turunan fungsi trigonometri dalam memecahkan masalah kehidupan nyata.

3. Media:

Lingkungan di sekitar kita

Buku-buku sumber tentang aplikasi turunan fungsi trigonometri.

Diberikan 3 permasalahan yang berkaitan dengan hal-hal berikut:

No.	Permasalahan
1.	Gerak benda melingkar
2.	Kelistrikan
3.	Vektor

Langkah-langkah:

Pelajari Lembar kerja di bawah ini:

Catat hasil pengamatan studi pustaka Anda pada tabel di bawah ini. Carilah hubungan apa yang terdapat pada salah satu permasalahan di atas yang berkaitan dengan fungsi trigonometri.

No.	Permasalahan	Hubungan keterkaitan dengan turunan fungsi trigonometri
1.		
2.		
3.		

Catat hasil proyek penelitianmu pada lembar kerja yang telah di sediakan.

Latihan Soal 2.2

Jika jarak suatu titik dari suatu posisi P pada setiap waktu t di berikan sebagai s(t)=A sin 2t, A>0, maka berapakah kecepatan terbesar diperoleh pada waktu t?

RANGKUMAN

1. Turunan fungsi trigonometri adalah sebuah turunan dari suatu fungsi pada titik tertentu menjelaskan sifat-sifat fungsi yang mendekati nilai input. Turunan trigonometri adalah persamaan turunan yang melibatkan fungsi-fungsi trigonometri seperti sinus (sin), cosines (cos), tangent (tan), cotangen (cot), secan (sec), dan cosecan (cosen).
2. Rumus Turunan Fungsi Trigonometri:
   - Untuk y = sin u maka y’ = u’.cos u
   - Untuk y = cos u maka y’ = –u’.sin u
   - Untuk y = tan u maka y’ = u’. $\sec^2 u$
   - Untuk y = cot u maka y’ = -u’.$\csc^2 u$
   - Untuk y = sec u maka y’ = u’. sec u tan u
   - Untuk y = csc u maka y’ = –u’ csc u cot u
3. Fungsi implisit adalah fungsi yang terdiri dari dua atau lebih variabel yakni variabel bebas dan variabel tak bebas, yang berada dalam satu ruas dan tidak bisa dipisahkan pada ruas yang berbeda.
4. Jika hanya mengandung variabel x, maka turunanya: $x\frac{d}{dx}$

   Jika hanya mengandung variabel y, maka turunanya: $y\frac{d}{dx}.\frac{dy}{dx}$

   Jika mengandung variabel x dan y, maka turunanya: $xy\frac{d}{dx}+xy\frac{d}{dy}.\frac{dy}{dx}$
5. Persamaan parameter dapat diselesaikan dengan menggunakan aturan rantai. $F(x,y)=0 \to \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \to \frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}};$
6. Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi perpindahan.

   Untuk perpindahan x = x(t), maka

   Kecepatan: $v = \frac{dx}{dt}$

   Percepatan adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan atau dengan kata lain.
7. Laju perubahan fungsi y=f(x) terhadap x adalah $\frac{dy}{dx}$ yang dinyatakan dalam x.

   Sebagai contoh, laju perubahan $y=x^2$ terhadap x adalah $\frac{dy}{dx}=2x$.
8. Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi perpindahan. Untuk perpidahan x = x(t), maka

   Kecepatan: $v=\frac{dx}{dt}$

   Percepatan adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan atau turunan kedua dari fungsi perpindahan.

   Percepatan: $a=\frac{dv}{dt}$ atau $a=\frac{d^2x}{dt^2}$

PENILAIAN AKHIR MODUL 12

A. PILIHAN GANDA

Pilihlah satu jawaban yang benar dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e!

1. Jika $y = x^2 \sin 3x$ maka $\frac{dy}{dx} = \cdots$

   a. $2x \sin 3x+2x^2 \cos x$ c. $3x \cos 3x+2x^2 \sin x$ e. $2x \cos x+ 3x \sin 3x$

   b. $2x \sin 3x+3x^2 \cos 3x$ d. $2x^2 \sin 3x+3x^2 \cos x$
2. Turunan pertama dari $f(x) = \sin^2(2x-3)$ adalah f’(x)=....

   a. $2\cos(4x-6)$ c. $-2\cos(4x-6)$ e. $4\sin(2x-3)$

   b. $2\sin(4x-6)$ d. $-2\sin(4x-6)$
3. Turunan pertama dari $y = \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$ adalah y'=....

   a. $y = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$ c. $y = \frac{2}{(\sin x+\cos x)^2}$ e. $y = \frac{2\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$

   b. $y = \frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$ d. $y = \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$
4. Diketahui fungsi $f(x) = \sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ maka nilai $f'(0) = \cdots$

   a. $2\sqrt{2}$ c. $\sqrt{3}$ e. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

   b. 2 d. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
5. Turunan dari $\sqrt[3]{\cos^2(\cos^2 + 5x)}$ adalah ……

   a. $-\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}(3x^2+5x)\sin(3x^2+5x)$

   b. $\frac{2}{3}(6x+5)\cos^{-\frac{1}{3}}(3x^2+5x)$

   c. $\frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}(3x^2+5x)\sin(3x^2+5x)$

   d. $-\frac{2}{3}(6x+5)\tan(3x^2+5x)\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$

   e. $(6x+5)\tan(3x^2+5x)\sqrt[3]{\cos^2(3x^2+5x)}$
6. Turunan pertama dari f(x) = 7 cos (5 – 3x) adalah f ‘ (x) = …..

   a. 35 sin (5 – 3x) c. 21 sin (5 – 3x) e. - 35 sin (5 – 3x)

   b. -15 sin (5 – 3x) d. - 21 sin (5 – 3x)
7. Diketahui $f(x) = \sqrt{\cos 3x}$ maka nilai $f'\left(\frac{1}{9}\pi\right)$ adalah....

   a. $\frac{3}{4}\sqrt{6}$

b. $-\frac{3}{4}\sqrt{6}$
c. $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$
d. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
e. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

8. Jika $xy + \sin xy = 1$, maka $y' = \cdots$
a. $y' = \frac{1-y-y\cos xy}{x+x\cos xy}$ c. $y' = \frac{1-y-y\sin xy}{x+x\sin xy}$ e. $y' = \frac{1+y-y\sin xy}{x+x\cos xy}$
b. $y' = \frac{1+y+y\cos xy}{x-x\cos xy}$ d. $y' = \frac{1-y-y\sin xy}{x-x\sin xy}$

9. Diketahui $x^2 + 5y^3 = x + 9$ maka turunan $\frac{dy}{dx}$ adalah....
a. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2y}{15y^2}$ c. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2y}{15y^2}$ e. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1-x^2}{2xy}$
b. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{15y^2}$ d. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1+2y}{15y^2}$

10. Turunan pertama fungsi implisit dari $\sin xy = 2xy^2 + 1$ adalah $y' = \ldots$
a. $y' = \frac{2x^2 - x\cos xy}{y\cos xy - 4xy}$ c. $y' = \frac{2x^2 - x\sin xy}{y\sin xy - 2xy}$ e. $y' = \frac{2y^2 - y\cos xy}{x\cos xy - 4xy}$
b. $y' = \frac{x^2 - x\cos xy}{y\cos xy - 4xy}$ d. $y' = \frac{2x^2 + x\sin xy}{y\sin xy - 4xy}$

11. Diketahui fungsi parameter $x = t - \sin t \ dan \ y = 1 - \cos\ t$ maka $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$
a. $\frac{\cos t}{1+\cos t}$ c. $\frac{\cos t}{1-\cos t}$ e. $\frac{\sin t}{-1+\sin t}$
b. $\frac{\sin t}{1-\sin t}$ d. $\frac{\sin\ t}{1-\sin t}$

12. Jika $x = 4t^2 - 4t \ dan \ y = 1 - 4t^2$, maka $\frac{dy}{dx} = \cdots$
a. $\frac{-2t}{t-1}$ c. $\frac{-2t}{2t+1}$ e. $\frac{-2t}{2t-1}$
b. $\frac{2t}{2t+1}$ d. $\frac{2t}{2t-1}$

13. Turunan pertama dari $4cos^2(3x-2) - 4sin^2(3x-2)$, adalah....
a. -24 sin (6x – 4) c. 24 sin (6x – 4) e. -24 cos (6x – 4)
b. 24 sin (6x + 4) d. -24 cos (6x + 4)

14. Diketahui $f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{2}{3}\pi\right)$, maka nilai $x = \frac{\pi}{2}$ adalah....
a. $-3\sqrt{3}$ c. $-2\sqrt{3}$ e. $3\sqrt{3}$
b. $-3\sqrt{2}$ d. $3\sqrt{2}$

15. Turunan pertama $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ adalah $f'(x) = \cdots$
a. $\sec x.tanx$ c. $\frac{\sin x}{\cos x}$ e. $\frac{\sec x}{\tan x}$
b. $\sec x$ d. $\tan x$

16. Diketahui fungsi dari $f(x) = 8\ cos\ ^3x$, maka nilai $x = \frac{\pi}{3}$ adalah.....
a. $3\sqrt{2}$ c. $3\sqrt{3}$ e. $-\sqrt{2}$
b. $-3\sqrt{2}$ d. $-3\sqrt{3}$

17. Tegangan pada suatu kapasitor merupakan dungsi sinus, $V_C = 200\sin 400t\ volt$. Nilai kapasitor pada kapasitor tersebut adalah $C = 2\,x10^{-6}\ Farad$. Maka model besar arus yang melalui kapasitor tersebut adalah...
a. $I_C = 0{,}0004\ \frac{d}{dt}(\sin 400t)$ d. $I_C = 0{,}4\ \frac{d}{dt}(\sin 4t)$
b. $I_C = 0{,}004\ \frac{d}{dt}(\sin 400t)$ e. $I_C = 4\ \frac{d}{dt}(\sin 4t)$
c. $I_C = 0{,}04\ \frac{d}{dt}(\sin 40t)$

18. Sebuah bola dilempar keatas setelah t detik akan mencapai ketinggian h meter, dengan $h(t) = 8 + 6t - t^2$. Ketinggian bola pada saat kecepatanya 0 m/detik adalah....
a. 15 meter c. 17 meter e. 18 meter
b. 16 meter d. 14 meter

19. Sebuah kapur barus berbentuk tabung dengan diameter lingkaran alasnya sama dengan tinggi tabung. Kapur barus tersebut menyublim sedemikian rupa sehingga bentuknya selalu berbentuk tabung yang diameter alasnya sama dengan tinggi tabung. Laju perubahan volume kapur barus terdapat tingginya pada saat tingginya 2 satuan adalah....
a. 2π c. 6 π e. 2π
b. 3π d. 9 π

20. Bila jarak sesuatu titik dari suatu posisi P pada setiap waktu t diberikan sebagai $s(t) = A\ sin\ 2t, A > 0$ maka kecepatan tersesar diperoleh pada waktu t =..
a. $\frac{k}{2}\ \pi, k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ d. $k\pi, k = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$
b. $\frac{k}{2}\ \pi, k = 1, 3, 5, \ldots$ e. $k\pi,\ k = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$
c. $\frac{k}{2}\ \pi, k = 0, 2, 4, 6, \ldots$

B. ESAI

Jawablah pertanyaan berikut dengan singkat dan jelas!

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi berikut ini:
a. f(x) = 2x^5 - $\frac{1}{2}$ sin x
b. $f(x) = \sin\ 2x + 4\cos\sqrt{x}$

2. Diketahui: $f(x) = \dfrac{\cos 6x}{1 + \sqrt{\sin x}}$. Tentukan $f'(\frac{\pi}{2})$

3. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diberikan persamaan $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$

4. Diketahui: x = t + et , y = t cos t , Tentukan $\frac{dy}{dx}$

5. Sebuah mesin diprogramkan untuk memindahkan peralatan sedemikian hingga posisi alat tersebut memenuhi persamaan $x = 3\, cos\, 2t\ dan\ y = \sin 3t$, x dan y dalam cm dan t dalam detik. Tentukan kecepatan alat tersebut pada saat $t = \frac{10\pi}{3}\ detik\ \left(1\, rad = \frac{180\ derajat}{\pi}\right)$

KUNCI JAWABAN DAN PENSKORAN

Kunci Jawaban Latihan Soal 1.1

Nomor Soal	Deskripsi Jawaban	Skor
1.	$a.\ f(x) = sin^2 x - sin\, x^2$	1
	$f'(x) = sin^2 x - sin\, x^2 = (\sin x)^2 - \sin x^2$	1
	$f'(x) = 2(\sin x).\cos x - \cos x^2 .2x$	1
	$f'(x) = \sin 2x - 2x\ \cos x^2$	1
	$b. misalkan\ u = (3x+4)^2 \rightarrow u' = 2.3(3x+4) = 6(3x+4)$	1
	$v = \sin 2x \rightarrow v' = 2\, cos\, 2x$	1
	$f'(x) = u'v + uv'$	1
	$f'(x) = 6(3x+4). \sin 2x + (3x+4)^2 . 2 \cos 2x$	1
	$f'(x) = 2(3x+4)(3 \sin 2x + (3x+4). \cos 2x)$	2
	$f'(x) = (6x+8)(3 \sin 2x + (3x+4). \cos 2x)$	2
	$c. f(x) = cotan\, 2x = \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}$	1
	$f'(x) = \dfrac{u}{v}\ dengan\ u = \cos 2x\ dan\ v = \sin 2x\ , mka$	1
	$f'(x) = \dfrac{u'v}{uv'} = \dfrac{-2 \sin 2x. \sin 2x - \cos 2x .2 \cos 2x}{sin^2 2x}$	2
	$f'(x) = \dfrac{-2sin^2 .2x + cos^2 .2x}{sin^2 2x}$	1
	$f'(x) = \dfrac{-2.1}{sin^2 2x}$	1
	$f'(x) = -2\, cosec^2\, 2x$	2
	$d.\ f(x) = (1 - x^2) \cos(1 - x^2)$	1
	$f'(x) = u.v\ dengan\ u = 1 - x^2\ dan\ v = \cos(1 - x^2), maka$	1
	$f'(x) = u'v + uv'$	1
	$f'(x) = -2x . \cos(1 - x^2) + (1 - x^2). sin\,(1 - x^2).(-2x)$	2
	$f'(x) = -2x (\cos (1 - x^2) + (1 - x^2) \sin(1 - x^2))$	2
	$e.\ f(x) = sin^n\, g(x) \rightarrow f'(x) = n. sin^{n-1}\, g(x). g'(x)$	1
	$maka\ untuk\ f(x) = sin^3(3 - 2x)$	1
	$f'(x) = 3. sin^2 (3 - 2x) \cdot \cos(3 - 2x) \cdot (-2)$	1
	$f'(x) = -3 . \sin(3 - 2x). 2 . \sin(3 - 2x). \cos(3 - 2x)$	2
	$f'(x) = -3 \cdot \sin(3 - 2x) \sin 2(3 - 2x)$	1
	$f'(x) = -3 \sin(3 - 2x) \sin(6 - 4x)$	1
	Total Skor	**34**

Nilai Latihan Soal 1.1 = $\dfrac{\text{Skor yang Diperoleh}}{34}$ x 100

Kunci Jawaban Latihan Soal 1.2

Nomor Soal	Deskripsi Jawaban	Skor
1.	$a. f(x) = (f(x))^n \rightarrow f'(x) = n.(f(x))^{n-1}.f'(x)$ $f'(x) = 2.\cos(2x - \pi).(-\sin(2x - \pi)).2$ $f'(x) = -2.\sin 2(2x - \pi).\cos(2x - \pi)$ $f'(x) = -2.\sin 2(2x - \pi) = -2\sin(4x - 2\pi)$	1 1 1 2
	$b. f(x) = \left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right]^2$, *maka* $f'(x) = 2\left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right]^{2-1}.\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).(2)$ $f'(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$	1 2 2
	$c. f(x) = \sqrt[3]{\cos^2(3x^2 + 5x)}$ $f(x) = (\cos^2(3x^2 + 5x))^{\frac{1}{3}}$ $f(x) = \cos^{\frac{2}{3}}(3x^2 + 5x)$ $f'(x) = \frac{2}{3}\cos^{-\frac{1}{3}}(3x^2 + 5x).(-\sin(3x^2 + 5x)).(6x + 5)$ $f'(x) = -\frac{2}{3}(6x + 5)\cos^{-\frac{1}{3}}(3x^2 + 5x)\sin(3x^2 + 5x)$	1 1 1 2 2
	$d.\ f(x) = \sqrt{x\sin x}$ $f'(x) = u.v$ *dengan* $u = x$ *dan* $v = \sin x$, *maka* $f'(x) = \frac{1}{2}(u.v)^{-\frac{1}{2}}.(u'v + u v')$ $f'(x) = \frac{1}{2}(x\sin x)^{-\frac{1}{2}}(1\sin x + x\cos x)$ $f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x}{2\sqrt{x\sin x}}$	1 1 1 1 2
	$e.\ f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ $f'(x) = 2(\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x)$ $f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$ $f'(x) = 2\cos 2x$ $f'(x) = 2(2\cos^2 x - 1)$ $f'(x) = 4\cos^2 x - 2$	1 2 1 1 1 1
	Total Skor	**30**

Nilai Latihan Soal 1.2 = $\frac{\text{Skor yang Diperoleh}}{30}$ x 100

Kunci Jawaban Latihan Soal 1.3

Nomor soal	Deskripsi Jawaban	Skor
1.	a. $a. x^2y^2 + 4xy = 12y$ $\frac{d}{dx}(x^2y^2 + 4xy) = \frac{d}{dx}(12y)$ $2xy^2 + x^2\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 4y + (4x)\frac{dy}{dx} = 12\frac{dy}{dx}$ $(2x^2 + 4x - 12)\frac{dy}{dx} = -2xy^2 - 4y$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^2 - 4y}{2x^2y + 4x - 12}$	1 1 3 2 2
	$b. \sin(x - y) = \cos y$ $[\cos(x - y)]\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = (-\sin y)\frac{dy}{dx}$ $\cos(x - y) - \cos(x - y)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} - \sin y$ $[-\cos(x - y) + \sin y]\frac{dy}{dx} = -\cos(x - y)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(x - y)}{-\cos(x - y) + \sin y}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x - y)}{\cos(x - y) - \sin y}$	1 2 2 2 2 2
	Total Skor	**20**

Nilai Latihan Soal 1.3 = $\frac{\text{Skor yang Diperoleh}}{20}$ x 100

Kunci Jawaban Latihan Soal 1.4

Nomor soal	Deskripsi Jawaban	Skor
1.	$a.\ x = t + \sin t \qquad y = 1 - \cos t$	1
	$\frac{dy}{dt} = 1 + \cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = 0 - (-\sin t) = \sin t,$	1
	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$	1
	$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$	1
	$b.\ x = a \cos t, \quad y = b \sin t$	1
	$\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}}$	2
	$= \left.\frac{b \cos t}{-a \sin t}\right\|_{t=\frac{\pi}{4}}$	2
	$= \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\frac{-a}{\sqrt{2}}} = -\frac{b}{a}$	2
	$c.\ x = 5 \cos t \quad dan \quad y = 4 \sin t$	1
	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$	1
	$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \cos t}{-5 \sin t} = -\frac{4}{5}\cot$	2
	Total Skor	**15**

Nilai Latihan Soal 1.4 = $\frac{\text{Skor yang Diperoleh}}{15}$ x 100

Kunci Jawaban Latihan Soal 2.1

Nomor soal	Deskripsi Jawaban	Skor
1.	Diketahui : $y = \sin 3x + \ cos\ ^2 x$	1
	Ubah $cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2A - 1)$	1
	$y = \sin 3x + \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{2}$	1
	$\frac{dy}{dx} = 3 \cos 3x - \sin - \sin 2x$	1
	$x(t) = \frac{0{,}2}{t} = 0{,}2\,t^{-1} \rightarrow t = \frac{0{,}2}{x} \rightarrow t^2 = 0{,}04x^{-2}$	2
	$\frac{dx}{dt} = 0{,}2t^{-2}$	1
	$\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{5t^2}$	1
	Perubahan y terhadap waktu	
	$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$	1
	$\frac{dy}{dt} = \frac{(3 \cos 3x - \sin 2x)}{\left(\frac{-1}{(5t^{-2})}\right)}$	2
	$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1}{5}\right)(3 \cos 3x - sin\ 2x)(t^2)$	2
	$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1}{5}\right)(3 \cos 3x - sin\ 2x)(0{,}04x^{-2})$	2
	$ingat\ x = \frac{\pi}{6} = 30°$	1
	$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1}{5}\right)(3 \cos 90 - sin\ 60)(0{,}04)\left(\frac{36}{\pi^2}\right)$	2
	$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\frac{(1{,}44)}{\pi^2}$	2
	$\frac{dy}{dx} = \frac{(1{,}44\sqrt{3})}{10\pi^2}$	2
	Total Skor	**22**

Nilai Latihan Soal 2.1 = $\frac{\text{Skor yang Diperoleh}}{22}$ x 100

Kunci Jawaban Latihan Soal 2.2

Nomor soal	Deskripsi Jawaban	Skor
1	Ingat konsep dasar bahwa kecepatan merupakan turunan dari jarak terhadap waktu.	
	Persamaan jarak :	
	$\rightarrow s(t) = A \sin 2t, A > 0$	1
	Kecepatan	
	$\rightarrow v = \frac{ds}{dt}$	1
	$\rightarrow v = \frac{d\,(A \sin 2t)}{dt}$	1
	$\rightarrow v = A \cos 2t \,.\, 2$	1

	$\rightarrow v = 2A\cos 2t$ Karena persamaan kecepatannya bergantung pada cos 2t dan nilai tertinggi untuk cos adalah 1, maka kecepat6an maksimum akan tercapai bila : $\rightarrow \cos 2t = 1$ $\rightarrow 2t = \pm n.2$ $\rightarrow \pm 2\, n.\pi\ dengan\ \ n = 0,1,2,3,\ldots$ Karena opsi pilihan dinyataan k, maka misalkan = 2n $\rightarrow 2t = \pm k\, \pi\ dengan\ k = 0,2,4,6,\ldots.$ Dengan demikian kecepatan terbesar diperoleh pada : $\rightarrow 2t = \pm k.\pi$ $\rightarrow t = \dfrac{k\,\pi}{2}\ ; k = 0,2,4,6,\ldots$	1 1 1 1 1 1 1 1
	Total Skor	**12**

Nilai Latihan Soal 2.2 = $\dfrac{\text{Skor yang Diperoleh}}{12}$ x 100

Kunci Jawaban Penilaian Akhir Modul 12

A. PILIHAN GANDA

1. **Pembahasan**

$y = x\sin 3x^2$

Misalkan

$u(x) = x^2\ maka\ u'(x) = 2x$

$v(x) = \sin 3x\ maka\ v'(x) = 3\cos 3x$

$y = u(x).v(x)$

$y = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

$y = 2x\,.\,sin\ 3x + x^2\ 3\cos 3x$

$y = 2xsin3x + 3x^2\cos 3x$

Jawaban : B

2. **Pembahasan**

$f(x) = sin^2(2x-3)$

$f'(x) = 2\ sin^{2-1}(2x-3)\cos(\ 2x-3)2$

$f'(x) = 2.2\sin(\ 2x-3\ )\cos(\ 2x-3)$

$f'(x) = 2.\sin 2(2x-3)$

$f'(x) = 2\sin(\ 4x-6\ )$

Jawaban : B

3. **Pembahasan**

$y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

Misalkan $u = \sin x\ maka\ u' = \cos x$

$v = \sin x + \cos x\ \ maka\ v' = \cos x - \sin x$

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$y' = \dfrac{\cos x\,(\sin x + cosx) - sinx\,(\cos x - sinx)}{(sinx + cosx)^2}$

$y' = \dfrac{cosxsinx + cos^2x - sinxcosx + sin^2x}{(sinx + cosx)^2}$

$y' = \dfrac{sin^2x + cos^2x}{(sinx + cosx)^2}$

$y' = \dfrac{1}{(sinx + cosx)^2}$

Jawaban : A

4. **Pembahasan**

$f(x) = sin^2\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

$f'(x) = 2sin^{\,2-1}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\ 2$

$f'(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

$f'(0) = 4\sin\left(2(0) + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2(0) + \frac{\pi}{6}\right)$

$f'(0) = 4\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$

$f'(0) = 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$f'(0) = \sqrt{3}$

Jawaban : C

5. **Pembahasan**

$f(x) = \sqrt[3]{cos^2(3x^2 + 5x)}$

$f(x) = cos^{\frac{2}{3}}(3x^2 + 5x)$

$f'(x) = \frac{2}{3}cos^{-\frac{1}{3}}\left(3x^2 + 5x\right).-sin\left(3x^2 + 5x\right)(6x + 5)$

$f'(x) = -\frac{2}{3}(6x + 5)\dfrac{\sin\left(3x^2 + 5x\right)}{cos^{\frac{1}{3}}\left(3x^2 + 5x\right)}x\dfrac{cos\left(3x^2 + 5x\right)}{cos\left(3x^2 + 5x\right)}$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(6x+5)\ \frac{\sin\left(3x^2+5x\right)}{cos\left(3x^2+5x\right)} x \frac{cos\left(3x^2+5x\right)}{cos^{\frac{1}{3}}\left(3x^2+5x\right)}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(6x+5)\tan\left(3x^2+5x\right) cos^{\frac{2}{3}}\left(3x^2+5x\right)$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(6x+5)\tan\left(3x^2+5x\right)\sqrt[3]{cos^2\left(3x^2+5x\right)}$$

Jawaban : D

6. **Pembahasan**

$f(x) = 7\cos(5-3x)$

$f'(x) = 7(-3)\sin(5-3x)$

$f'(x) = -21\sin(5-3x)$

Jawaba : D

7. **Pembahasan**

$f(x) = \sqrt{\cos 3x}$ dan $f'(x) = \left(\frac{1}{9}\pi\right)$

$f(x) = \sqrt{\cos 3x} \rightarrow f(x) = (cos3x)^{\frac{1}{2}}$

maka

$$f'(x) = \frac{1}{2}(cos3x)^{-\frac{1}{2}}.(-\sin 3x).3$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}(\cos 3x)^{-\frac{1}{2}}(\sin 3x)$$

$$= -\frac{3sin3x}{2\sqrt{\cos 3x}}$$

$$f'\left(\frac{1}{9}\pi\right) = -\frac{3sin3\left(\frac{1}{9}\pi\right)}{2\sqrt{cos3\left(\frac{1}{9}\pi\right)}}$$

$$f'\left(\frac{1}{9}\pi\right) = -\frac{3cos60°}{2\sqrt{\cos 60°}}$$

$$f'\left(\frac{1}{9}\pi\right) = -\frac{3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)}}$$

$$f'\left(\frac{1}{9}\pi\right) = -\frac{\frac{3}{2}\sqrt{6}}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{6}$$

Jawaban : D

8. **Pembahasan**

xy + sin xy = 1

$(y + y') + \cos xy\ (y + y') = 1$

$y + xy' + y\cos xy + xy'\cos xy = 1$

Kedua ruas tambah dengan –y -ycosxy. Sehingga diperoleh

$xy' + xy'\cos xy = 1 - y - y\cos xy$

$y'(x + x\cos xy) = 1 - y - y\cos xy$

$$y' = \frac{1 - y - y\cos xy}{x + x\cos xy}$$

Jawaban : A

9. **Pembahasan**

$x^2+5y^3=x+9$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+5y^3) = \frac{d}{dx}(x+y)$$

$$2x+15y^2\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{15y^2}$$

Jawaban : B

10. **Pembahasan**

$\sin xy = 2xy^2+1$

$$\frac{d}{dx}(\sin xy) = \frac{d}{dx}\left(2xy^2+1\right)$$

$$(\cos xy)\left(\frac{d}{dx}(xy)\right) = 2x\left(\frac{d}{dx}(y^2)\right) + 2y^2\left(\frac{d}{dx}(x)\right)$$

$(\cos xy)(xy'+y) = 2x\ (2yy') + 2y^2$

$y'^{(x\cos xy - 4xy)} = 2x^2 - y\cos xy$

$$y' = \frac{2y^2 - y\cos xy}{x\cos xy - 4xy}$$

Jawaban : E

11. **Pembahasan**

$x = t - \sin t$ dan $y = 1 - \cos t$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \text{ dan } \frac{dy}{dx} = \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

Jawaban : B

12. Pembahasan

$x = 4t^2 - 4t \quad \text{dan} \quad y = 1 - 4t^2$

$\frac{dx}{dt} = 8t^2 - 4, \quad \frac{dy}{dt} = -8t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-8t}{8t-4} = \frac{-2t}{2t-1}$

Jawaban : E

13. Pembahasan

$f(x) = 4\cos^2(3x-2) - 4\sin^2(3x-2)$

$f(x) = 4(\cos^2(3x-2) - \sin^2(3x-2))$

$f(x) = 4\cos 2(3x-2)$

$f(x) = 4\cos(6x-4)$

Maka $f'(x) = 4.\{-6\sin(6x-4)\}$

$f'(x) = -24.\sin(6x-4)$

Jawaban : A

14. Pembahasan

$f(x) = 2\sin\left(3x - \frac{2}{3}\pi\right)$ Untuk $x = \frac{\pi}{2}$

Maka

$f'(x) = 6\cos\left(3x - \frac{2}{3}\pi\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\cos\left(3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{3}\pi\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\cos\left(\frac{9}{6}\pi - \frac{4}{6}\pi\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\cos\frac{5}{6}\pi$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\sqrt{3}$

Jawaban : A

15. Pembahasan

$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$

$f(x) = \frac{2\sin x.\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}$

$f(x) = 2\cos x - 2\cos x + \frac{1}{\cos x}$

$f(x) = \sec x$

Maka $f'(x) = \sec x \tan x$

Jawaban : B

16. Pembahasan

$f(x) = 8\cos^3 x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$

$f(x) = 8(\cos x)^3$

Maka

$f'(x) = 24(\cos x)^2.(-\sin x)$

$f'(x) = 24\sin x.\ \cos^2 x$

$f'(x) = -24\sin\left(\frac{\pi}{3}\right).\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$f'(x) = -24.\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$f'(x) = -3\sqrt{3}$

Jawaban : D

17. Pembahasan

$I_C = C\frac{dv_C}{dt}$

$I_C = C\frac{d(200\sin 400t)}{dt}$

$I_C = 2 \times 10^{-6}.200\frac{d}{dt}(\sin 400t)$

$I_C = 0{,}0004.\ \frac{d}{dt}(\sin 400t)$

Jawaban : A

18. Pembahasan

$h(t) = 8 + 6t - t^2$

$h'(t) = 0$

$6 - 2t = 0$

$-2t = -6$

$t = 3$

$h(t) = 8 + 6t - t^2$

$h(t) = 8 + 6(3) - (3)^2$

$h(t) = 8 + 18 - 9$

$h(t) = 17$ meter

Jawaban : C

19. Pembahasan

Volume = $\pi r^2 t$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}d\right)^2 t\ \pi$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}t\right)^2 t$$

$$= \frac{1}{4}\pi t^3$$

Laju perubahan volume kapur terhadap tinggi :

$$\frac{dvolume}{d} = \frac{3}{4}\pi t^2$$

Sehingga, laju perubahan volume saat t = 2 adalah :

$$\frac{3}{4}\pi t^2 = \frac{3}{4}.\pi.2^2 = 3\pi$$

Jawaban : B

20. Pembahasan

Persamaan jarak :

→s(t)= A sin 2t , A >0

Kecepatan

$\rightarrow v = \frac{ds}{dt}$

$\rightarrow v = \frac{d(A\sin 2t)}{dt}$

→v=A cos 2t . 2

→v=2A cos 2t

→ cos 2t=1

$\rightarrow 2t = \pm n.2$

→ ±2 n.π dengan n=0,1,2,3,…

Karena opsi pilihan dinyataan k, maka misalkan = 2n

→2t= ± k π dengan k=0,2,4,6,….

Dengan demikian kecepatan terbesar diperoleh pada :

→2t= ± k.π

$\rightarrow t = \frac{k\pi}{2}$;k=0,2,4,6,…

Jawaban : C

B. ESAI

No	Uraian Jawaban	Skor
1.	a. f(x) = $2x^5 - \frac{1}{2}\sin x \rightarrow f'(x) = 10x^4 - \frac{1}{2}\cos x$	1
	Perhatikan fungsi pada soal mengandung unsur $2x$ dan $\sqrt{x}$ yang merupakan bentuk u = fungsi dari (x).	1
	Ingat Rumus : $y = \sin u \rightarrow y' = (\cos u)\cdot u'$ $y = \cos u \rightarrow y' = -(\sin u)\cdot u'$	1
	b. Karena $f(x) = \sin 2x + 4\cos\sqrt{x}$	1
	maka $f'(x) = (\cos 2x).2 + 4(-\sin\sqrt{x}).\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$	2
	$= 2\cos 2x - 4(\cancel{\sin}\sqrt{x}).\frac{1}{2}\cancel{x}^{-\frac{1}{2}}$	2
	$= 2\cos 2x - 2(\sin\sqrt{x})\frac{1}{x^{1/2}}$	2
	$= 2\cos 2x - \frac{2}{\sqrt{x}}(\sin\sqrt{x})$.	2
2.	Gunakan formula: $f(x) = \frac{U}{V} \rightarrow f'(x) = \frac{U'V - UV'}{V^2}$	1
	dengan $U = \cos 6x$ dan $V = 1 + \sqrt{\sin x} = 1 + (\sin x)^{\frac{1}{2}}$.	1
	Cari dulu U' dan V' : $U' = (\sin 6x).6 = 6\sin 6x$	1
	$V' = \frac{1}{2}(\sin x)^{\frac{1}{2}-1}(\cos x) = \frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}}(\cos x) = \frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$	2

	Maka $f'(x) = \frac{U'V - UV'}{V^2} = \frac{6(\sin 6x)(1+\sqrt{\sin x}) - (\cos 6x).\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}}{(1+\sqrt{\sin x})^2}$ Masukkan $x = \frac{\pi}{2} = 90°$, $f'(\frac{\pi}{2}) = f'(90°) = \frac{6(\sin 540°)(1+\sqrt{\sin 90°}) - (\cos 540°).\frac{1}{2}\frac{\cos 90°}{\sqrt{\sin 90°}}}{(1+\sqrt{\sin 90°})^2}$ $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{6 \cdot 0 \cdot (1+\sqrt{1}) - (-1).\frac{1}{2}\frac{0}{\sqrt{1}}}{(1+\sqrt{1})^2} = \frac{0-0}{4} = 0.$	3 1 3 2
3.	$\frac{d}{dx}(x^2 + 2xy + 3y^2) = \frac{d}{dx}(4)$ $\rightarrow \frac{d}{dx}(x^2) + 2\frac{d}{dx}(xy) + 3\frac{d}{dx}(y^2) = 0$ $\rightarrow 2x + 2\left[\frac{d}{dx}(x).y + x\frac{d}{dx}(y)\right] + 3\frac{d}{dy}(y^2).\frac{dy}{dx} = 0$ $\rightarrow 2x + 2(y + x\frac{dy}{dx}) + 6y\frac{dy}{dx} = 0$ $\rightarrow 2x + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 6y\frac{dy}{dx} = 0$ $\rightarrow \frac{dy}{dx}(2x + 6y) = -2x - 2y$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x-2y}{2x+6y}.$	1 1 2 1 1 1 1
4.	$\frac{dy}{dt}$ = cos t - t sin t $\frac{dx}{dt}$ = 1 + et y1 = $\frac{(\cos t - t \sin t)}{(1 + et)}$	1 1 2
5.	$x = 3\cos 2t.$ $\rightarrow Vx = \frac{dx}{dt}$ $\rightarrow Vx = -6\sin 2t$ $\rightarrow Vx = -6\sin 2\left(\frac{10\pi}{3}\right)$ $\rightarrow Vx = -6\sin 120°$	1 1 1 1 1

	$\rightarrow Vx = -6\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ $\rightarrow Vx = -3\sqrt{3}\,cm/s$ $x = 3\sin 3t.$ $\rightarrow Vy = \frac{dy}{dt}$ $\rightarrow Vy = 3\sin 3t$ $\rightarrow Vy = 3\sin 3\left(\frac{10\pi}{3}\right)$ $\rightarrow Vy = 3\sin 360°$ $\rightarrow Vy = 3(1)$ $\rightarrow Vy = 3cm/s$ Besar resultan kecepatan $V = \sqrt{(Vx^2 + Vy^2)}$ $V = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 3^2}$ $V = \sqrt{27+9}$ $V = \sqrt{36}$ $V = 6\,cm/s$ Arah sudut resultan kecepatan $tan\theta = \frac{Vy}{Vx}$ $tan\theta = \frac{3}{(-3\sqrt{3})}$ $tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ $tan\theta = \tan 150°$ $\theta = 150°$	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
	Skor Total	**60**

Nilai Soal Pilihan Ganda = $\frac{\text{Jumlah soal yang dijawab dengan benar}}{20}$ x 30

Nilai Soal Essay = $\frac{\text{Jumlah Skor yang Diperoleh}}{60}$ x 70

Nilai Latihan Akhir Modul = Nilai Soal Pilihan Ganda + Nilai Soal Esai

GLOSARIUM

Fungsi Aljabar	:	Fungsi sederhana yang memuat variabel.
Fungsi Trigonometri	:	Fungsi yang memuat bentuk trigonometri dan variabel terdapat pada bentuk trigonometri.
Fungsi Turunan	:	Untuk nilai x yang membesar maka nilai fungsi semakin berkurang .
Trigonometri	:	Bagian dari ilmu matematika yang mempelajari tentang hubungan antara sisi dan sudut suatu segtiga serta fungsi dasar yang muncul dari relasi tersebut.
Turunan	:	Pengukuran terhadap perubahan fungsi seiring dengan perubahan nilai input.

SARAN REFERENSI

Kanginan, M. Nurdiansyah, H. & Akhmad. G. (2016). Matematika Untuk Siswa SMA/MA Kelas XII Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam. Bandung: Yrama Widya.

Referensi Matematika dalam kehidupan Manusia, karya Dr. Wahyudin dan Drs. Sudrajat, M.Pd.

Panduan Belajar Matematika SMA. Karya Sumanto.

Sumber Media Internet (melalui brsing: anistuing.biogspot.co.id, fedraadi. Wordpress. Com, dan lain-lain).

KRITERIA PINDAH/LULUS MODUL

Anda dianggap tuntas dalam mempelajari modul ini dan boleh pindah ke modul berikutnya apabila peserta didik mencapai nilai 70 yang dihitung dari perpaduan soal penugasan dan latihan, baik latihan pada tiap-tiap unit maupun latihan pada akhir modul. Untuk menghitung perolehan nilai peserta didik menggunakan rumus berikut:

$$NA = 30\%\ NRP + 30\%\ NRLU + 40\%\ NLA$$

Keterangan:

NA = Nilai akhir
NRP = Nilai rata-rata penugasan tiap-tiap unit
NRLU = Nilai rata-rata latihan pada tiap-tiap unit
NLA = Nilai latihan akhir modul

Jika nilai Anda masih dibawah 70, maka dianjurkan untuk mempelajari kembali terutama bagian yang belum dikuasai.

DAFTAR PUSTAKA

Kanginan. M. Nurdiansyah. H. & Akhmad, G. (2016). Matematika Untuk Siswa SMA/MA Kelas XII Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam. Bandung: Yrama Widya.

Muslim. (2018). Soal-Jawab Matematika Peminatan (Online). Tersedia: *https:www.papankecil. wordpress.com*. Html (Agustus 2016).

Tim Penyusun KREATIF Matematika, Matematika SMA/MA kelas XII IPA semester gasal, (Klaten, Viva Pakarindo, 2007).

Simangunsong Wilson, Matematika Dasar, (Jakarta: Erlangga, 2005).

Handayani Denih. (2016). Matematika Peminatan SMA/MA Kelas XII. (Online). Tersedia: *https://www.m4th-lab.net*. Html (oktober 2016).

Suah Sembiring, Mahmun Zulkifli, Marsito, Ibnu Rusdi. Matematika Untuk Siswa SMA/MA Kelas XII. Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-ilmu Alam. (Bumi Arsi Mekarrahayu, bandung, 2016).

Sobel, Max A. dan Maletsky Evan M. 2004. Mengajar Matematika: Sebuah Buku Sumber Alat Peraga, Aktivitas, dan Strategi Edisi Ketiga. Jakrta: Erlangga.

Soal-Soal UN SMA 2000-2015
Soal-Soal UMPTN SMA 2000-2015
Soal-Soal SPMB SMA 2000-2015
Soal-Soal SIMAK SMA 2000-2015
Soal-Soal UM-UGM SMA 2000-2015

BIODATA PENULIS

Nama : **Ockta Hidayati, S.Pd.**
Nomor HP : 0822-8102-5085
Email : ocktahidayati123@gmail.com
Alamat Facebook : *https://www.facebook.com/OcktaHidayati*
Alamat Kantor : Jalan Naskah 2 nomor 734 Km.7 Sukarami Palembang
Bidang Keahlian : Matematika

Riwayat Pendidikan/ Profesi (10 tahun terakhir)

1. 2008-2018 : Mengajar di SMA N 11 OKU
2. 2008-2018 : Mengajar di SMK Yadika Baturaja
3. 2008-2018 : SMA PGRI 3 Baturaja
4. 2016-20018 : Tentor LBBA Baturaja
5. 2018 : Tutor Kesetaraan SKB OKU

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S-1 : Matematika, STKIP PGRI BandarLampung (2000-2005)

Nama : **Harun Al Rasyid, S.T.**
Telp/ HP/ WA : 0711 443341/ 08127321 0545
Alamat : Jl. P.S Ing Pandan (depan Lrg. Palang Merah) No.947 RT.19 RW.05 Kel. 35 Ilir Kec. Ilir Barat II Palembang 30146
Pekerjaan : Kasi PMK
Alamat Instansi : Jl. Ki Gede Ing Suro RT 11 RW 05 Kel. 29 Ilir Kec. Ilir Barat II Palembang 30443

Nama : **Drs. G. Kundaru**
HP/ WA : 0812 6160 6600
Email : *kundaruikip@gmail.com*
Pekerjaan : Pamong Belajar Madya di BP PAUD dan DIKMAS Sumsel
Alamat Instansi : Jl. Naskah II No.714 km.7 Sukarame Palembang, Sumsel Kode Pos 30153
Riwayat Pendidikan Tinggi:
1. S-1 Pendidikan Luar Sekolah, IKIP Jogjakarta (Angkatan 1979)

catatan: